$$\boxed{\sin(kx + m) = a;}$$

$$\boxed{\cos(kx + m) = a;}$$

$$\boxed{\operatorname{tg}(kx + m) = a;}$$

$$\boxed{\operatorname{ctg}(kx + m) = a;}$$

$\sin x = a$, при $|a| \le 1$:

$$\boxed{x = (-1)^n \arcsin a + \pi n;}$$

$x = \arcsin a + 2\pi k;$

$x = \pi - \arcsin a + 2\pi k;$

$\cos x = a, \quad$ при $|a| \leq 1$:

$$\boxed{x = \pm \arccos a + 2\pi n;}$$

Если $|a| > 1$:

$$\left.\begin{aligned} \sin x = a; \\ \cos x = a; \end{aligned}\right\} \text{ не имеют решений;}$$

$tg\,x = a$ имеет решение $\forall a$

$$\boxed{x = \operatorname{arctg} x\ a + \pi n;}$$

$ctg\ x = a$ имеет решение $\forall a$

$$\boxed{x = \operatorname{arcctg} x\ a + \pi n;}$$

Частные случаи:

	a = 0	a = –1	a = 1
sin x = a	$x = \pi n$	$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$	$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$
cos x = a	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n$	$x = \pi + 2\pi n$	$x = 2\pi n$

Пример 1. Решить уравнение $\sin 4x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Решение.

$t = 4x;$

$\sin t = \frac{\sqrt{2}}{2};$

$|a| = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \Longrightarrow \quad |a| \le 1;$

$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n;$

$t = (-1)^n \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} + \pi n;$

$\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}; \quad \Longrightarrow \quad t = (-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n;$

$4x = (-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n;$

$4x = (-1)^n \frac{\pi}{16} + \frac{\pi n}{4};$

Ответ: $4x = (-1)^n \frac{\pi}{16} + \frac{\pi n}{4};$ ■

Замечание.

$\boxed{\sin 4x = \frac{\sqrt{2}}{2}} \rightarrow \boxed{4x = (-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n;}$

Пример 2. Найти те корни уравнения $\sin 4x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, которые принадлежат отрезку $[0; \frac{\pi}{2}]$.

Решение.

$\sin 4x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $4x = (-1)^n \frac{\pi}{16} + \frac{\pi n}{4}$;

$n = 0$: $4x = (-1)^0 \frac{\pi}{16} + 0 = \frac{\pi}{16}$; $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$;

$n = 1$: $4x = (-1)^1 \frac{\pi}{16} + \frac{\pi \cdot 1}{4} = -\frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{16}$; $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$;

$n = 2$: $4x = (-1)^2 \frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{2} = \frac{9\pi}{16}$; $x \notin [0, \frac{\pi}{2}]$;

$n = -1$: $4x = (-1)^{-1} \frac{\pi}{16} - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{16} - \frac{\pi}{4} = -\frac{5\pi}{16}$; $x \notin [0, \frac{\pi}{2}]$;

Ответ: $\frac{\pi}{16}$; $\frac{3\pi}{16}$. ◀

Пример 3. Решить уравнение $\operatorname{tg}\frac{x}{3} + 2\operatorname{ctg}\frac{x}{3} = 3$.

$\operatorname{tg} t \cdot \operatorname{ctg} t = 1$

Решение.

$y = \operatorname{tg}\frac{x}{3}$;

$\operatorname{ctg}\frac{x}{3} = \frac{1}{y}$;

$y + \frac{1}{y} = 3$;

$y^2 - 3y + 2 = 0$;

$y = 1$; $y = 2$;

$\operatorname{tg}\frac{x}{3} = 1$; $\operatorname{tg}\frac{x}{3} = 2$;

$\operatorname{tg} x = a$ имеет решение $\forall a$

$$\boxed{x = \operatorname{arctg} x\ a + \pi n;}$$

Пример 3. Решить уравнение $\operatorname{tg}\frac{x}{3} + 2\operatorname{ctg}\frac{x}{3} = 3$.

$$\boxed{\operatorname{tg} t \cdot \operatorname{ctg} t = 1}$$

Решение.

$y = \operatorname{tg}\frac{x}{3}$;

$\operatorname{ctg}\frac{x}{3} = \frac{1}{y}$;

$y + \frac{1}{y} = 3$;

$y^2 - 3y + 2 = 0$;

$y = 1$; $y = 2$;

$\operatorname{tg}\frac{x}{3} = 1$; $\operatorname{tg}\frac{x}{3} = 2$;

$\frac{x}{3} = \operatorname{arctg} 1 + \pi n = \frac{\pi}{4} + \pi n$; $\Longrightarrow$ $x = \frac{3\pi}{4} + 3\pi n$;

$\frac{x}{3} = \operatorname{arctg} 2 + \pi n$; $\Longrightarrow$ $x = 3\operatorname{arctg}2 + 3\pi n$;

Ответ: $x = \frac{3\pi}{4} + 3\pi n$; $x = 3\operatorname{arctg}2 + 3\pi n$. ◀

Пример 4. Решить уравнение 2 cos x sin 7x - sin 7x = 0.

Решение.

sin 7x (2 cos x – 1) = 0;

sin 7x = 0;   2 cosx – 1 = 0;

2 cosx = 1;

cosx = $\frac{1}{2}$;

	a = 0	a = –1	a = 1
sin x = a	$x = \pi n$	$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$	$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$
cos x = a	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n$	$x = \pi + 2\pi n$	$x = 2\pi n$

Пример 4. Решить уравнение $2 \cos x \sin 7x - \sin 7x = 0$.

Решение.

$\sin 7x\,(2 \cos x - 1) = 0;$

$\sin 7x = 0;$ $\quad$ $2 \cos x - 1 = 0;$

$2 \cos x = 1;$

$\cos x = \frac{1}{2};$

$7x = \pi n;$

$x = \frac{\pi n}{7};$

$\cos x = a, \quad$ при $|a| \le 1$:

$$\boxed{x = \pm \arccos a + 2\pi n;}$$

Пример 4. Решить уравнение $2 \cos x \sin 7x - \sin 7x = 0$.

Решение.

$\sin 7x\,(2 \cos x - 1) = 0;$

$\sin 7x = 0;$ $\quad 2 \cos x - 1 = 0;$

$2 \cos x = 1;$

$\cos x = \frac{1}{2};$

$7x = \pi n;$

$x = \frac{\pi n}{7};$

$a = \frac{1}{2}; \quad \Longrightarrow \quad x = \pm \arccos \frac{1}{2} + 2\pi n;$

$\arccos \frac{1}{2} = t;$ $\quad \cos t = \frac{1}{2};$

Пример 4. Решить уравнение $2 \cos x \sin 7x - \sin 7x = 0$.

Решение.

$\sin 7x\,(2 \cos x - 1) = 0;$

$\sin 7x = 0;$ $\quad 2 \cos x - 1 = 0;$

$2 \cos x = 1;$

$\cos x = \frac{1}{2};$

$7x = \pi n;$

$x = \frac{\pi n}{7};$

$a = \frac{1}{2};$ $\quad \Longrightarrow \quad x = \pm \arccos \frac{1}{2} + 2\pi n;$

$\arccos \frac{1}{2} = t;$ $\qquad \cos t = \frac{1}{2};$

t	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$
cos t	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

Пример 4. Решить уравнение $2 \cos x \sin 7x - \sin 7x = 0$.

Решение.

$\sin 7x\,(2\cos x - 1) = 0;$

$\sin 7x = 0;$ $\quad 2\cos x - 1 = 0;$

$2\cos x = 1;$

$\cos x = \frac{1}{2};$

$7x = \pi n;$

$x = \frac{\pi n}{7};$

$a = \frac{1}{2}; \implies x = \pm \arccos\frac{1}{2} + 2\pi n;$

$\arccos\frac{1}{2} = t;$ $\quad \cos t = \frac{1}{2};$

$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}; \implies \arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3};$

$x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n;$

Ответ: $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n.$ ◄

Замечание.

$$\boxed{f_1(x) \cdot f_2(x) = 0;}$$

Пример. Решить уравнение $ctgx(cosx - 1) = 0$.

Решение.

$ctg\ x = 0$; $\cos x - 1 = 0$;

$\cos x = 1$;

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
ctg t	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Пример. Решить уравнение $ctgx(cosx - 1) = 0$.

Решение.

$\text{ctg } x = 0;$ $\quad \cos x - 1 = 0;$

$\cos x = 1;$

$\text{arctg } 0 = \frac{\pi}{2};$

$x = \frac{\pi}{2} + \pi n;\ n \in Z;$

	a = 0	a = –1	a = 1
sin x = a	$x = \pi n$	$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$	$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$
cos x = a	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n$	$x = \pi + 2\pi n$	$x = 2\pi n$

Пример. Решить уравнение $ctgx(\cos x - 1) = 0$.

Решение.

$\operatorname{ctg} x = 0$; $\cos x - 1 = 0$;

$\cos x = 1$;

$\operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{2}$;

$x = \frac{\pi}{2} + \pi n;\ n \in Z$;

$x = 2\pi n;\ n \in Z$;

$x = 2\pi n$ – это посторонний корень;

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + \pi n;\ n \in Z$; ◀